$\gamma'(t) = a'(t) + ib'(t)$ και $\gamma(t) \in U(1)$. Άρα $a^2(t) + b^2(t) = 1$

$-1 \le a(t) \le 1$ $\quad a(0) = 1$ μέγιστο. $\quad a : (-c, c) \xrightarrow{\text{διαφ.}} \mathbb{R}$.

Επομένως, $a'(0) = 0$ γιατί στο 0 έχω μέγιστο.

$\gamma'(0) = a'(0) + ib'(0) = ib'(0)$, $\; b'(0) \in \mathbb{R}$

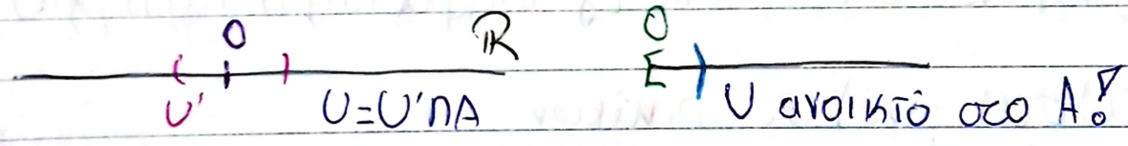
Άρα $T_{U(1)} = \{ ib'(0) \mid b'(0) \in \mathbb{R} \} \overset{1}{\cong} \mathbb{R} \Rightarrow \dim U(1) = \dim T_{U(1)} = 1$

• Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι (έχουν ανοιχτά και κλειστά σύνολα).

f συνεχής στο x_0, $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow X \xrightarrow{f} Y$, $U(x_0) \xrightarrow{f(U(x_0)) \subseteq} V_{x_0}$

$\forall V$ ανοιχτό του y_0 $\exists U$ ανοιχτό του x_0 ώστε $f(U) \subseteq V$

• $A \subseteq X$, τοπ. χώρος. A τοπολογικός υπόχωρος. Το U ανοιχτό στο A $\Leftrightarrow \exists U'$ ανοιχτό στο X ώστε $U = U' \cap A$



ΚΑΜΠΥΛΗ $\gamma : (-c, c) \xrightarrow{\text{συνεχής}} G \le GL_n(\mathbb{K}) \subseteq \underbrace{M_n(\mathbb{K})}_{\text{μετρικός χώρος}} = \mathbb{K}^{n^2}$

$\gamma(t) =$ πίνακας $\in G = (a_{11}(t), a_{12}(t), \dots, a_{1n}(t), a_{21}(t), a_{22}(t), \dots, a_{2n}(t), \dots, a_{nn}(t))$

Η $\gamma(t)$ είναι διαφορίσιμη, όταν κάθε συντεταγμένη a_{ij} είναι διαφορίσιμη.

Μελετάμε διαφορίσιμες καμπύλες ώστε $\gamma(0) = I$: ταυτοτικός.
{όλες τις διαφορίσιμες καμπύλες ώστε $\gamma(0) = I$}

διαφορίσιμες $\Rightarrow \exists \gamma'(0)$.

$\gamma(t) = (a_{11}(t), \dots, a_{nn}(t))$ ← πίνακας $\in G \leq Gl_n(\mathbb{K})$

$\gamma(0) = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 1)$ ← ταυτοτικός πίνακας

$\gamma'(t) = (a_{11}'(t), \dots, a_{nn}'(t))$ ← πίνακας

$\gamma'(0) = (a_{11}'(0), \dots, a_{nn}'(0))$ ← πίνακας $\subseteq M_n(\mathbb{K})$.

Ορισμος

Το παραπάνω $\gamma'(0)$ καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο 0.

$T_G = \{\gamma'(0) \mid \forall \gamma$ διαφορίσιμη καμπύλη με $\gamma(0) = I\} \subseteq M_n(\mathbb{K})$

Δείξαμε ότι $T_G \leq M_n(\mathbb{K})$ διαν. υπόχωρος.

$\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$ σαν δ.χ.

Ορισμος

$\dim G = \dim T_G$, είναι η διαφορική πολλαπλότητα.

- Ορίζεται γινόμενο στο σύνολο $\{\gamma$ διαφορίσιμη καμπ., $\gamma(0) = I\}$

$(\gamma\sigma)(t) = \gamma(t)\sigma(t)$ γινόμενο πινάκων

$(\gamma\sigma)'(t) = \gamma'(t)\sigma(t) + \gamma(t)\sigma'(t)$

Προταση

$\dim S_p(1) = 3$, $S_p(1) = S^3$

Αποδειξη

Έστω $\gamma : (-c, c) \to Sp(1)$ διαφορ. καμπύλη με $\gamma(0) = I = 1$

$Sp(1) \subseteq \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$

Έστω $\gamma(t) = a(t) + ib(t) + jd(t) + ke(t)$

Με $a, b, d, e : (-c, c) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες.

$\gamma(0) = a(0) + i b(0) + j d(0) + k e(0) = 1$

$a(0) = 1$, $b(0) = 0 = d(0) = e(0)$

$\gamma'(t) = a'(t) + i b'(t) + j d'(t) + k e'(t)$

$\gamma(t) \in Sp(1) \Leftrightarrow \gamma(t)\overline{\gamma(t)} = 1 \Leftrightarrow a^2(t) + b^2(t) + d^2(t) + e^2(t) = 1$

και $a(0) = 1$, $b(0) = 0 = d(0) = e(0)$

Άρα $-1 \leq a(t) \leq 1$. Στο 0 η a καμπύλη έχει μέγιστο.

Άρα $a'(0) = 0$

$\gamma'(0) = \overset{0}{a'(0)} + i b'(0) + j d'(0) + k e'(0)$

Για τα b', d', e' δεν γνωρίζω τίποτα. Μόνο ότι $b', d', e' \in \mathbb{R}$.

$\gamma'(0) \in \{ i\mu + j\nu + k\rho \mid \mu, \nu, \rho \in \mathbb{R} \} \leq M(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$

$\dim T_{Sp(1)} = \underset{\text{έχω 3 μεταβλητές}}{3} = \dim Sp(1) = \dim S^3$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\dim Gl_n(\mathbb{R}) = n^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ συνεχής απεικόνιση

$\det(I) = 1$ $\exists$ ανοιχτή περιοχή, μικρή, γύρω από το 1 $(\varepsilon+1, \varepsilon+1)$ ώστε $\det^{-1}(-\varepsilon+1, \varepsilon+1)$ είναι ανοιχτό σύνολο του $M_n(\mathbb{R})$ που περιέχει τον I.

$\det^{-1}(-\varepsilon+1, \varepsilon+1) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ ώστε $\forall$ στοιχείο του A (δηλ. πίνακα) ο πίνακας αυτός να έχει $\det \neq 0$.

Δηλαδή, $\det^{-1}(-\varepsilon+1, \varepsilon+1) \subseteq Gl_n(\mathbb{R})$

Θέλουμε ν.δ.ο. $T_{Gl_n(\mathbb{R})} = M_n(\mathbb{R})$

Πρέπει ν.δ.ο. δηλαδή, κάθε πίνακας B είναι εφαπτόμενο διάνυσμα, κάποιας διαφορίσιμης καμπύλης στον $Gl_n(\mathbb{R})$

Ορίζουμε, $\gamma : (-c, c) \to Gl_n(\mathbb{R})$ με $\gamma(t) = tB + I$.

Είναι προφανώς διαφορίσιμη και συνεχής
$\gamma(0) = 0B + I = I$
$\gamma'(0) = B$
Άρα κάθε πίνακας B είναι εφαπτόμενο διάνυσμα και ισχύει ότι $T_I Gl_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, $\dim Gl_n(\mathbb{R}) = n^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ο A καλείται αντιθετο-συμμετρικός (Skew-Symmetric) αν $A + A^t = O_{n\times n}$.
Με $so(n)$ συμβολίζουμε όλους τους αντιθετο-συμμετρικούς πίνακες

'Αλλο SO (κεφαλαία) και άλλο so (μικρά)

ΠΡΟΤΑΣΗ

$so(n)$: Άλγεβρα Lie

Το σύνολο $so(n)$ αποτελεί υπόχωρο του $M_n(\mathbb{R})$ διάστασης $\frac{n(n-1)}{2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$so(n) \leq M_n(\mathbb{K})$. $A, B \in so(n) \Rightarrow A + B \in so(n)$.
$(A+B) + (A+B)^t = A + B + A^t + B^t = O_{n\times n} + O_{n\times n} = O_{n\times n}$.
$rA + (rA)^t = rA + rA^t = r(A + A^t) = r \cdot O = O$
$(a_{ij}) + (a_{ii})^t = O \Rightarrow \begin{cases} a_{ii} + a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = -a_{ji} \quad i \neq j \end{cases}$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

$$\begin{pmatrix} 0 & & & n-1 \\ & 0 & & n-2 \\ & & 0 & \vdots \\ & & & 0 \quad 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Έχουμε $(n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ στοιχεία του αντιθέτου συμμετρικού πίνακα τα οποία λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή.

Άρα η διάσταση του χώρου είναι $\frac{n(n-1)}{2}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ο A καλείται αντιθετο-ερμητιανός (skew-hermitian) αν $A + \bar{A}^t = O_{n\times n}$.
Με $su(n)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αντιθετο-ερμητιανών πινάκων

ΠΡΟΤΑΣΗ

$su(n) \leq M_n(\mathbb{C})$ και $\dim su(n) = n^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A, B \in su(n) \Rightarrow A + B \in su(n)$

$(A+B) + (\overline{A+B})^t = A + B + (\bar{A} + \bar{B})^t = A + B + \bar{A}^t + \bar{B}^t = O + O = O$

$\forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow cA \in su(n)$. Άρα $su(n) \leq M_n(\mathbb{C})$, ως πραγματικός διαν. χώρο

$A + \bar{A}^t = O \Rightarrow a_{ij} + \bar{a}_{ji} = O$.

Αν $\boxed{i=j} \Rightarrow a_{ii} + \bar{a}_{ii} = 0 \quad \Rightarrow a + bi + a - bi \Rightarrow a = 0$
(το πραγματικό του μέρος είναι 0).
Πάνω, λοιπόν, στην κύρια διαγώνιο έχουμε καθαρά φανταστικούς. Αυτοί είναι n ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

π.χ. Ο $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$ είναι αντιθετο-ερμητιανός

Αλλά $i \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιθετο-ερμητιαν. Άρα είναι υπόχωρος $\mathbb{R}$ και όχι του $\mathbb{C}$, ο $su(n)$.

$\sqrt{5}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}i & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5}i \end{pmatrix}$ είναι αντιθετο-ερμητιανός

Αν $\boxed{i \neq j}$ $a_{ij} + \overline{a_{ji}} = 0$

$a + bi + \overline{a_{ji}} = 0 \Rightarrow \overline{a_{ji}} = -a - bi$

$a_{ji} = -a + bi$

π.χ. $\begin{pmatrix} ia & a_1 + ib_1 & \\ -a_1 + ib_1 & ib & \\ & & ic \end{pmatrix}$ Θα μετρήσουμε πόσες ανεξάρτητες πραγματικές μεταβλητές έχουμε. Δηλαδή, θα υπολογίσουμε το πλήθος μιας βάσης

n (στην κύρια διαγώνιο) $+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \in M_n(\mathbb{H})$. Ο A θα καλείται αντίθετο-συμπλεκτικός (skew-symplectic) αν $A + \overline{A}^t = 0$

Με $sp(n)$ συμβολίζουμε όλους τους αντίθετο συμπλεκτικούς.

ΠΡΟΤΑΣΗ (Η.W.)

Να δείξετε, ότι $sp(n)$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος, διάστασης $n(2n+1) = 2n^2 + n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\gamma : (-c, c) \to G$ διαφορίσιμη καμπύλη με $\gamma(0) = I$.

- Για $G = O(n)$, έχουμε $\gamma'(0)$ είναι αντίθετο-συμμετρικός.
- Για $G = U(n)$, έχουμε $\gamma'(0)$ είναι αντίθετο-ερμιτιανός
- Για $G = Sp(n)$, έχουμε $\gamma'(0)$ είναι αντίθετο-συμπλεκτικός.

Δηλαδή, εφαπτόμενος χώρος της $O(n)$, συμβολίζεται $T_{O(n)}$ και είναι υπόχωρος της $so(n)$

Αντίστοιχα, $T_{U(n)} \leq su(n)$ και $T_{Sp(n)} \leq sp(n)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω G και H ομάδες και $\varphi: G \to H$ ομομορφισμός.
Υποθέτουμε ότι G, H είναι υποομάδες της $GL_n(\mathbb{K})$.
Θεωρούμε ότι οι ομομορφισμοί που μελετάμε, είναι συνεχείς απεικονίσεις.

- Αν $\gamma: (-c, c) \to G$ είναι μια καμπύλη, τότε ορίζεται η καμπύλη $\varphi \circ \gamma: (-c, c) \to H$. $(\varphi \circ \gamma)(t) = \varphi(\gamma(t))$
- Ένας ομομορφισμός $\varphi: G \to H$ θα καλείται διαφορίσιμος αν η καμπύλη $\varphi \circ \gamma$ είναι διαφορίσιμη $\forall$ διαφορίσιμη καμπύλη γ.

Αν ο $\varphi: G \to H$ είναι διαφορίσιμος ομομορφισμός τότε για $\gamma'(0)$ ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της G στο I ορίζουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα της H στο I από $d\varphi(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$

$d\varphi: T_G \to T_H \quad \gamma'(0) \longmapsto d\varphi(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$

Η $d\varphi$ καλείται το διαφορικό της φ.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $d\varphi$ είναι γραμμική απεικόνιση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\gamma, \sigma: (-c, c) \to G$, $\gamma(0) = I = \sigma(0)$ και γ, σ διαφορίσιμες.

$\gamma'(0), \sigma'(0) \in T_G$

$d\varphi(\gamma'(0) + \sigma'(0)) = d\varphi(\gamma'(0)) + d\varphi(\sigma'(0))$ (Θέλω να το δείξω)

$d\varphi(\gamma'(0) + \sigma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0) + (\varphi \circ \sigma)'(0) =$
$d\varphi(\gamma'(0)) + d\varphi(\sigma'(0))$

$d\varphi(a\gamma'(0)) = a\, d\varphi(\gamma'(0))$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $\varphi: G \to H$ διαφορίσιμος ισομορφισμός.
Τότε $d\varphi: T_G \to T_H$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\exists\, y: H \to G$ ομοιομορφισμός, διαφορίσιμος, ώστε $y\varphi: G \to G$

και $\varphi y: H \to H$ ταυτοτικές $\quad y\varphi = 1 \Rightarrow d(y\varphi) = d\cdot 1 = d_{TG} \Rightarrow$

$dy \cdot d\varphi = 1_{TG}$

Αντίστοιχα, $d\varphi dy = 1_{TH}$

Αυτές είναι γραμμικές, αναγκαστικά. Άρα η μία είναι

αντίστροφη της άλλης.

Επομένως, έχω ισομορφισμό

Υπενθύμιση Γραμμική Άλγεβρα

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$$B = e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots \quad \text{σειρά.}$$

$B = b(i,j) \quad A = a(i,j) \quad A^k = (a_{i,j})^{(k)}$

$$b_{i,j} = (I_{i,j}) + a_{i,j} + \frac{(a_{i,j})^{(2)}}{2} + \frac{(a_{i,j})^{(3)}}{3!} + \dots \quad \text{Σειρά}$$

Συγκλίνει το παραπάνω; Αν όχι ο B $\nexists$, έστω και για ένα (i,j).

Αν ο A διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow A = P\Lambda P^{-1}$ με Λ = διαγώνιος

πίνακας $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$= PIP^{-1} + P\Lambda P^{-1} + \frac{P\Lambda^2 P^{-1}}{2} + \frac{P\Lambda^3 P^{-1}}{3!} + \dots$$

$$e^{A} = P\left(I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \dots\right) P^{-1} = P e^{\Lambda} P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & e^{d_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$